

2 Veranderingen

Voorkennis Herleiden

bladzijde 45

- 1 a $(2a-3)(4a+1) - 5(a-2) = 8a^2 + 2a - 12a - 3 - 5a + 10 = 8a^2 - 15a + 7$
 b $(4a-1)^2 - 2(3a^2-1) = 16a^2 - 8a + 1 - 6a^2 + 2 = 10a^2 - 8a + 3$
 c $4(p+q)(p-q) - (p-q)^2 = 4(p^2 - q^2) - (p^2 - 2pq + q^2) = 4p^2 - 4q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 3p^2 - 5q^2 + 2pq$
 d $(2p-5q)^2 + 3(p+2q)^2 = 4p^2 - 20pq + 25q^2 + 3(p^2 + 4pq + 4q^2) = 4p^2 - 20pq + 25q^2 + 3p^2 + 12pq + 12q^2 = 7p^2 - 8pq + 37q^2$
- 2 a $-3a(a+2) + (2a-1)^2 = -3a^2 - 6a + 4a^2 - 4a + 1 = a^2 - 10a + 1$
 b $(5p-q)^2 - 3(p-2q)^2 = 25p^2 - 10pq + q^2 - 3(p^2 - 4pq + 4q^2) = 25p^2 - 10pq + q^2 - 3p^2 + 12pq - 12q^2 = 22p^2 + 2pq - 11q^2$
 c $4(a-3b)(a+3b) - 2a(a-b) = 4(a^2 - 9b^2) - 2a^2 + 2ab = 4a^2 - 36b^2 - 2a^2 + 2ab = 2a^2 - 36b^2 + 2ab$
 d $(2p-3q)(5p-q) - (3p-q)^2 = 10p^2 - 2pq - 15pq + 3q^2 - (9p^2 - 6pq + q^2) = 10p^2 - 2pq - 15pq + 3q^2 - 9p^2 + 6pq - q^2 = p^2 - 11pq + 2q^2$
- 3 a $(3p)^3 - 4p \cdot 3p^2 = 27p^3 - 12p^3 = 15p^3$
 b $\frac{18a^{12}b^6}{2a^4b^3} = 9a^8b^3$
 c $(p^2q^3)^4 - 3p^6q^{10} \cdot (2pq)^2 = p^8q^{12} - 3p^6q^{10} \cdot 4p^2q^2 = p^8q^{12} - 12p^8q^{12} = -11p^8q^{12}$
 d $\frac{50(a^3b)^2}{(5ab)^2} = \frac{50a^6b^2}{25a^2b^2} = 2a^4$
- 4 a $(2x^3 - x)^2 = 4x^6 - 4x^4 + x^2$
 b $(4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = 16x^4 - 1$
 c $3x(x^2 + 2)(x^3 - 1) = 3x(x^5 - x^2 + 2x^3 - 2) = 3x^6 - 3x^3 + 6x^4 - 6x$
 d $5x^2(x^3 - 5)^2 = 5x^2(x^6 - 10x^3 + 25) = 5x^8 - 50x^5 + 125x^2$

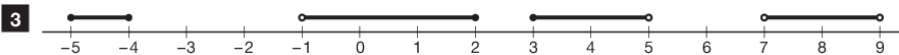
2.1 Toenamediagrammen

bladzijde 46

- 1 a Tussen 4 en 11 uur.
 b Tussen 11 en 14:30 uur neemt de stijging toe. Van 14:30 tot 16 uur neemt de stijging af.
 c Van 4 tot 8 uur neemt de daling toe. Van 8 tot 11 uur neemt de daling af.

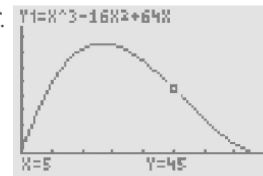
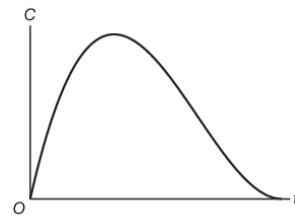
bladzijde 47

- 2 $\langle -6, -2 \rangle$, $[-1, 0]$, $[1, 3)$ en $\langle 4, 10]$



- 4 a $-1 < x \leq 2$
 b $6 \leq x < 10$
 c $5 \leq x \leq 15$
 d $0 \leq x < 4,5$
- 5 a $[-8, 3)$
 b $\langle 4, 4\frac{1}{2}]$
 c $[5, 1; 7, 3]$
 d $\langle 3, \pi]$

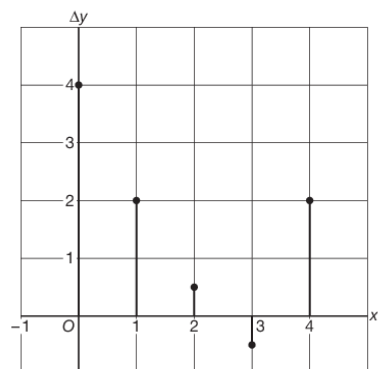
- 6** Afnemend dalend op $\langle -\infty, 1 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 1, 2 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 2, 3 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 3, \infty \rangle$.
- 7** Afnemend dalend op $\langle -6, -4 \rangle$ en op $\langle 3, 5 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle -4, -2 \rangle$ en op $\langle 5, \infty \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle -2, 1 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 1, 3 \rangle$.
- 8** a Constant stijgend op $\langle 0, 3 \rangle$.
 Afnemend stijgend op $\langle 3, 4 \rangle$.
 Toenemend dalend op $\langle 4, 5 \rangle$.
 Afnemend dalend op $\langle 5, 7 \rangle$.
 Toenemend stijgend op $\langle 7, 10 \rangle$.
 b Bij de steilste klim is de snelheid het laagst. Dus na 7 minuten.
- 9** a Voer in $y_1 = x^3 - 16x^2 + 64x$.
 Neem bijvoorbeeld
 $X_{\min} = 0$, $X_{\max} = 8$, $Y_{\min} = -10$, $Y_{\max} = 100$.
 b De optie maximum geeft $x \approx 2,67$.
 Dus na 2 uur en 40 minuten is de concentratie maximaal.
 c Voer in $y_2 = 20$.
 De optie intersect geeft $x \approx 0,3$ en $x \approx 6,2$.
 Dus gedurende het tijdsinterval $\langle 0,3; 6,2 \rangle$ is de concentratie meer dan 20 mg/l.
 d Ongeveer bij $t = 5$ gaat de grafiek over van toenemend dalend naar afnemend dalend. Dus na 5 uur neemt de daling van de concentratie af.



- 10** a De omzet in het eerste kwartaal van 2008 was € 30 000 hoger dan de omzet in het vierde kwartaal van 2007. Dus was de omzet in het eerste kwartaal van 2008 gelijk aan $480\,000 + 30\,000 = €\,510\,000$.
 b In het vierde kwartaal van 2008 was de omzet $510\,000 + 20\,000 + 25\,000 + 8\,000 = €\,563\,000$.
 c De som van de omzetten van de vier kwartalen is $510\,000 + 530\,000 + 555\,000 + 563\,000 = €\,2\,158\,000$.
 d In het vierde kwartaal van 2008 was de omzet € 563 000.
 In het vierde kwartaal van 2009 was de omzet $563\,000 + 3\,000 - 15\,000 - 5\,000 - 20\,000 = €\,526\,000$.
 e De omzet daalde in het tweede, derde en vierde kwartaal van 2009.

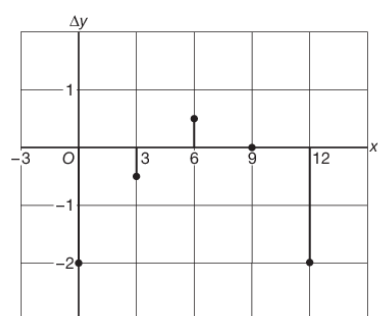
11 a

x -interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[-1, 0]$	4
$[0, 1]$	2
$[1, 2]$	0,5
$[2, 3]$	-0,5
$[3, 4]$	2



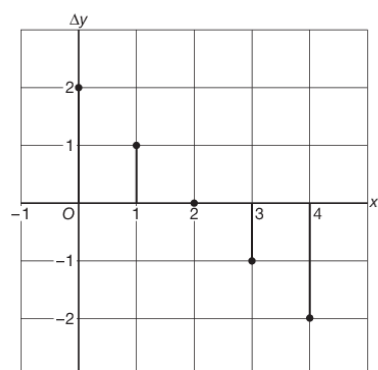
b

x -interval bij $\Delta x = 3$	Δy
$[-3, 0]$	-2
$[0, 3]$	-0,5
$[3, 6]$	0,5
$[6, 9]$	0
$[9, 12]$	-2



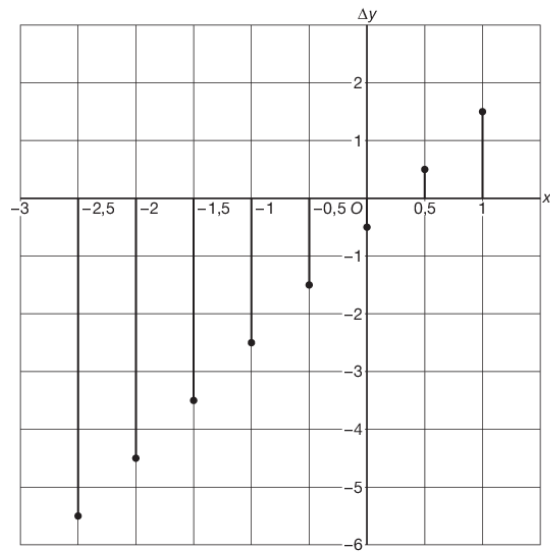
12 a

x -interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[-1, 0]$	2
$[0, 1]$	1
$[1, 2]$	0
$[2, 3]$	-1
$[3, 4]$	-2



b

x -interval bij $\Delta x = 0,5$	Δy
$[-3; -2,5]$	$-5,5$
$[-2,5; -2]$	$-4,5$
$[-2; -1,5]$	$-3,5$
$[-1,5; -1]$	$-2,5$
$[-1; -0,5]$	$-1,5$
$[-0,5; 0]$	$-0,5$
$[0; 0,5]$	$0,5$
$[0,5; 1]$	$1,5$

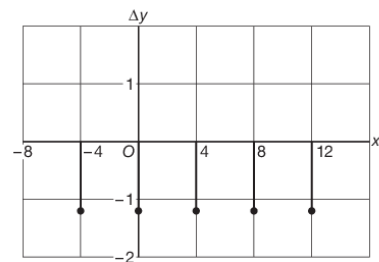


c De eindpunten van de toenames liggen op een rechte lijn.

bladzijde 53

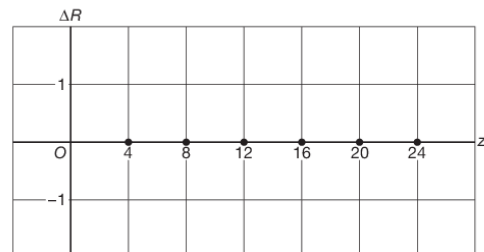
13 a

x -interval bij $\Delta x = 4$	Δy
$[-8; -4]$	$-1,2$
$[-4; 0]$	$-1,2$
$[0; 4]$	$-1,2$
$[4; 8]$	$-1,2$
$[8; 12]$	$-1,2$



b

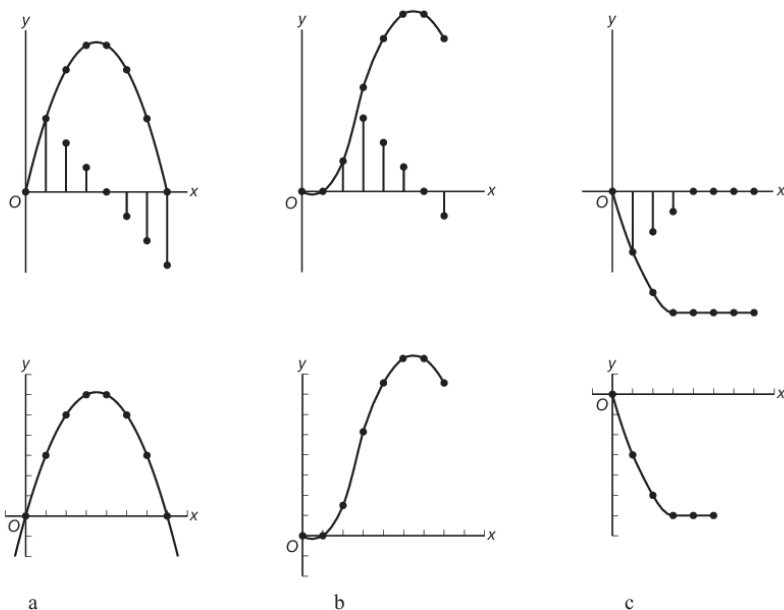
z -interval bij $\Delta z = 4$	ΔR
$[0; 4]$	0
$[4; 8]$	0
$[8; 12]$	0
$[12; 16]$	0
$[16; 20]$	0
$[20; 24]$	0



c Beide grafieken zijn rechte lijnen. Dus de toenames zijn constant.
Dus liggen de eindpunten van de toenames in het toename-diagram op een horizontale lijn.

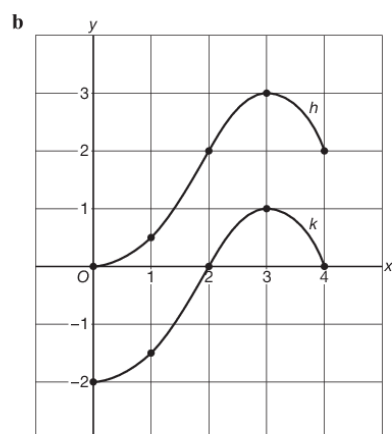
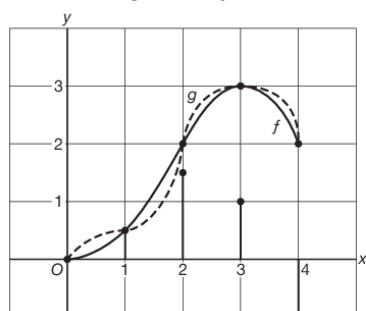
- 14 a** Bij een rechte lijn liggen de eindpunten van de toenames in het toename-diagram op een horizontale lijn.
b Bij een parabool liggen de eindpunten van de toenames op een rechte lijn die niet horizontaal is.

15



In de figuren hierboven zie je ook de toenamediagrammen. Zo kun je zien hoe de globale grafieken met de toenamediagrammen samenhangen. In het uiteindelijke antwoord moet je de toenamediagrammen wegdenken.

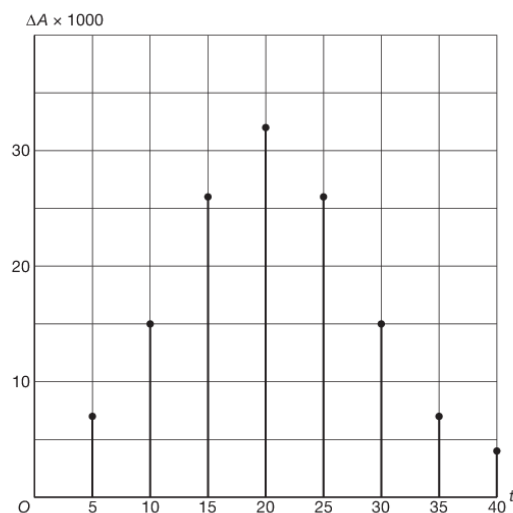
16 a Ook in deze figuur moet je het toenamediagram wegdenken.



- 17 a constante daling
b afnemende stijging
c constante stijging
d toenemende daling

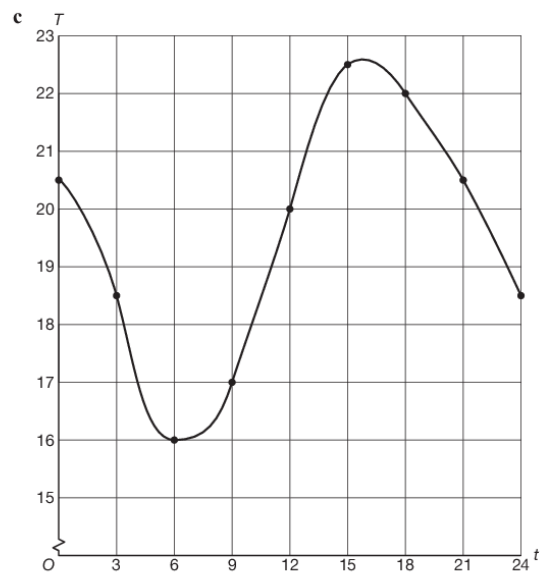
18 a

t -interval $\Delta t = 5$	ΔA
[0, 5]	7 000
[5, 10]	15 000
[10, 15]	26 000
[15, 20]	32 000
[20, 25]	26 000
[25, 30]	15 000
[30, 35]	7 000
[35, 40]	4 000



- b Na 10 jaar is er $6000 + 7000 + 15000 = 28000 \text{ m}^3$ hout. Na kappen van 20000 m^3 resteert er 8000 m^3 hout. Deze hoeveelheid hout is in de grafiek te zien bij $t = 2$.
Vijf jaar later, dus op $t = 7$, is de 8000 m^3 aangegroeid tot 18000 m^3 hout. Er is dus onvoldoende hout voor het opnieuw kappen van 20000 m^3 .
- c In het tijdsinterval $[15, 20]$ is de groei 32000 m^3 hout.
Dit is de grootste toename in een periode van 5 jaar.
De bosopzichter kan het beste beginnen met kappen na 20 jaar. Hij kan dan het beste elke vijf jaar 32000 m^3 kappen, omdat daarna het houtvolume in vijf jaar weer met 32000 m^3 aangroeit. Zijn houtopbrengst is op deze manier maximaal.

- 19 a Op $[0, 24]$ is $\Delta T = -2 - 2,5 + 1 + 3 + 2,5 - 0,5 - 1,5 - 2 = -2$.
Mieke heeft dus gelijk.
- b Op $[0, 12]$ is $\Delta T = -2 - 2,5 + 1 + 3 = -0,5$.
Dus om 0:00 uur is $T = 20 + 0,5 = 20,5 \text{ } ^\circ\text{C}$.

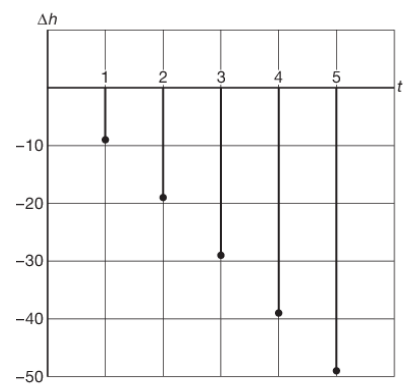


20 a

t	h	Δh
0	145	—
1	136	-9
2	117	-19
3	88	-29
4	49	-39
5	0	-49

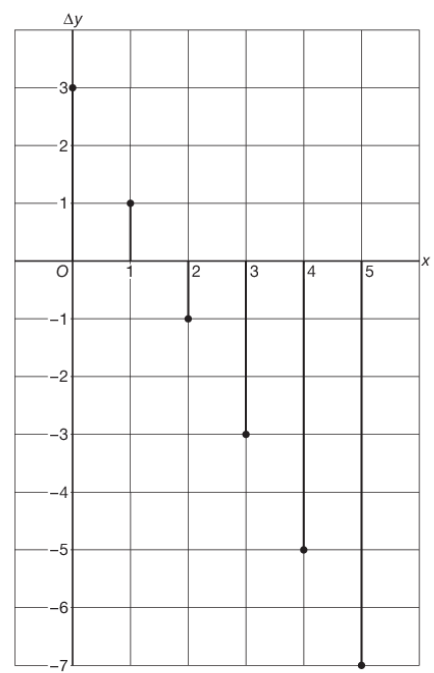
b

tijdsinterval met $\Delta t = 1$	Δh
$[0, 1]$	-9
$[1, 2]$	-19
$[2, 3]$	-29
$[3, 4]$	-39
$[4, 5]$	-49



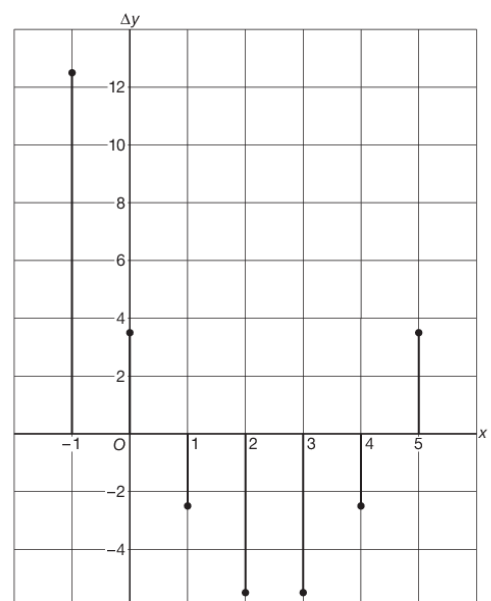
21

x	y	Δy
-1	1	-
0	4	3
1	5	1
2	4	-1
3	1	-3
4	-4	-5
5	-11	-7



22

x	y	Δy
-2	-15	-
-1	-2,5	12,5
0	1	3,5
1	-1,5	-2,5
2	-7	-5,5
3	-12,5	-5,5
4	-15	-2,5
5	-11,5	3,5



2.2 Differentiequotiënten en snelheden

bladzijde 57

- 23** a Op het interval $[0, 3]$ legt de motor 30 meter af.
De gemiddelde snelheid is $\frac{30}{3} = 10$ m/s.
Op het interval $[3, 7]$ legt de motor $165 - 30 = 135$ meter af.
De gemiddelde snelheid is $\frac{135}{4} = 33,75 \approx 34$ m/s.
- b In de zesde seconde legt de motor $125 - 85 = 40$ m af.
De gemiddelde snelheid is $\frac{40}{1} = 40$ m/s.
- c In de zevende seconde legt de motor $165 - 125 = 40$ m af.
De gemiddelde snelheid is $\frac{40}{1}$ m/s = 40 m/s = 144 km/uur, want 1 m/s = 3,6 km/uur.
- d Omdat de grafiek tussen $t = 5$ en $t = 7$ een rechte lijn is, heeft Jan gelijk.
- e Nee, want de snelheid neemt toe in de derde seconde.

bladzijde 59

- 24** a In de eerste minuut legt Wim 350 meter af.
De gemiddelde snelheid is $350 \text{ m/minuut} = 350 \cdot 60 \text{ m/uur} = 21\,000 \text{ m/uur} = 21 \text{ km/uur}$.
In de tweede minuut legt Wim $600 - 350 = 250$ m af.
De gemiddelde snelheid is $250 \text{ m/minuut} = 250 \cdot 60 \text{ m/uur} = 15 \text{ km/uur}$.
In de derde minuut legt Wim $800 - 600 = 200$ m af.
De gemiddelde snelheid is $200 \text{ m/minuut} = 200 \cdot 60 \text{ m/uur} = 12 \text{ km/uur}$.
- b Naarmate de tijd voorbij gaat, verloopt de grafiek minder steil.
- 25** a Op het interval $[10, 14]$ is $\Delta N = 2356 - 1993 = 363$.
 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{363}{4} = 90,75$
- b Op het interval $[2, 8]$ is de toename $\Delta N = 1646 - 462 = 1184$
 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1184}{6} \approx 197$
- c Op het interval $[2, 8]$ is de grafiek steiler dan op het interval $[10, 14]$.
- d De gemiddelde toename per dag is het grootst op het interval $[4, 8]$, want daar is de grafiek het steilst.
De gemiddelde toename per dag is het kleinst op het interval $[10, 20]$, want daar is de grafiek het minst steil.
- 26** a Op het interval $[6, 10]$ is $\Delta T = 13 - 10 = 3$. Dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0,75$ °C per uur.
Op het interval $[9, 14]$ is $\Delta T = 20 - 12 = 8$. Dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{8}{5} = 1,6$ °C per uur.
- b Op $t = 16$ is $T = 20$, op $t = 20$ is $T = 17$. Dus op $[16, 20]$ is $\Delta T = 17 - 20 = -3$.
 $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{-3}{4} = -0,75$. Tussen $t = 16$ en $t = 20$ daalt de temperatuur gemiddeld 0,75 °C per uur.
- d Op het interval $[0, 6]$ is $\Delta T = 10 - 10 = 0$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{0}{6} = 0$ °C per uur.
Op het interval $[10, 24]$ is $\Delta T = 13 - 13 = 0$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{0}{14} = 0$ °C per uur.
- e Bijvoorbeeld op het interval $[10, 20]$ is $\Delta T = 17 - 13 = 4$, dus $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{4}{10} = 0,4$ °C per uur.
Dus op het interval $[10, 20]$ is de gemiddelde verandering 0,4 °C/uur.

27 a De gemiddelde verandering van y op het interval $[2, 4]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$.

b Het differentiequotient op het interval $[3, 6]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{6-3} = \frac{0}{3} = 0$.

c Het differentiequotient op het interval $[-3, 0]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{0-3} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

d De helling van de lijn OA is het differentiequotient op het interval $[0, 4]$,

$$\text{dus helling } OA \text{ is } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-0}{4-0} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}.$$

28 a De gemiddelde verandering op het interval $[-6, -4]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{4-12}{-4-6} = \frac{-8}{-10} = \frac{4}{5}$.

De gemiddelde verandering op het interval $[-2, 2]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{6-6}{2-2} = \frac{0}{0}$.

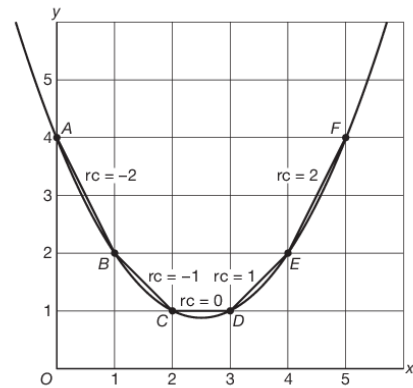
b Het differentiequotient op het interval $[-5, 0]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{0-4}{0-5} = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$.

Het differentiequotient op het interval $[-5, 2]$ is $\frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{6-4}{2-5} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$.

29 a Stel dat de punten A, B, C, D, E, F op de grafiek liggen met $x_A = 0, x_B = 1, \dots, x_F = 5$. Omdat op het interval $[0, 1]$ geldt

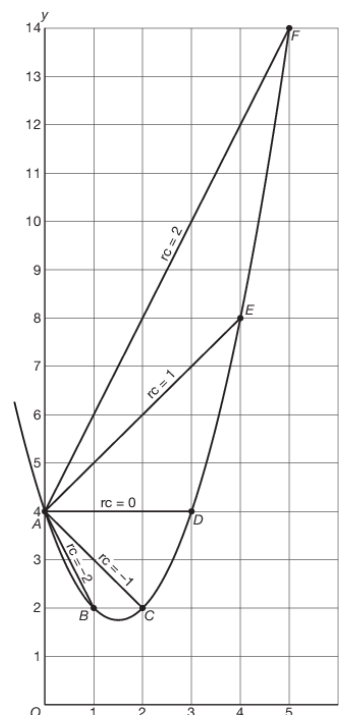
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2, \text{ moet } rc_{AB} = -2.$$

Zo is $rc_{BC} = -1, rc_{CD} = 0, rc_{DE} = 1$ en $rc_{EF} = 2$. Dus de grafiek hiernaast is een passende grafiek.



- b Nu moet $rc_{AB} = -2$
 $rc_{AC} = -1$
 $rc_{AD} = 0$
 $rc_{AE} = 1$
 $rc_{AF} = 2$

Zie de lijnstukjes in de grafiek. Door de punten A t/m F is een passende grafiek getekend.



bladzijde 62

- 30** a Aan het stijgen van de grafiek is te zien dat de verwarming werkt.
 Dat is tussen 6 en 9 uur en van 11 uur tot 14:30 uur. In totaal $6\frac{1}{2}$ uur.
 b De grafiek is toenemend dalend op de intervallen $[0, 6]$, $[9, 10]$ en $[14:30; 16]$.
 c Op het interval $[3, 16]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{19 - 12,5}{16 - 3} = \frac{6,5}{13} = 0,5$.
 Op het interval $[5, 7]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13 - 12}{7 - 5} = \frac{1}{2} = 0,5$.
 Op het interval $[7, 17]$ is $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{18 - 13}{17 - 7} = \frac{5}{10} = 0,5$.
 d Zie de uitwerking van vraag c: $[3, 16]$ was het grootste van de drie intervallen waarvoor de gemiddelde temperatuurstijging $0,5^\circ\text{C}$ was.
 Houd je geodriehoek langs de punten $A(3; 12,5)$ en $B(16, 19)$. We proberen nu een lijnstuk te vinden dat evenwijdig is met AB en twee punten van de grafiek met elkaar verbindt die zo ver mogelijk uit elkaar liggen. We vinden de punten $C(0, 13)$ en $D(15; 20,5)$.
 Het gevraagde grootste interval is $[0, 15]$.
 e Houd je geodriehoek zo, dat $rc = -0,5$, bijvoorbeeld langs de punten $(0, 18)$ en $(12, 12)$. Verschuif de geodriehoek evenwijdig totdat je twee punten op de grafiek met elkaar verbindt die zo ver mogelijk uit elkaar liggen. Dat blijken de punten $(12:40; 19,8)$ en $(20, 16)$ te zijn.
 Dus het gevraagde interval is $[12:40, 20]$.

- 31** a Op de grafiek liggen de punten $(1, f(1)) = (1, -2)$ en $(5, f(5)) = (5, 6)$.
 Het differentiequotiënt van $f(x)$ op $[1, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} = \frac{8}{4} = 2$.
 b Op de grafiek ligt het punt $(4, f(4)) = (4, 1)$.
 Het differentiequotiënt op $[4, 5]$ is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 1}{5 - 4} = 5$.

32 a Het differentiequotiënt op $[-1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-6 - 6}{4} = -3.$$

b Het differentiequotiënt op $[1, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - 4}{4 - 1} = \frac{0}{3} = 0.$$

c Het differentiequotiënt op $[-5, -1]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-1) - f(-5)}{-1 - (-5)} = \frac{6 - 50}{4} = \frac{-44}{4} = -11.$$

d Het differentiequotiënt op $[-5, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-5)}{4 - (-5)} = \frac{-4 - 50}{4 + 5} = \frac{-54}{9} = -6.$$

33 a Voer in $y_1 = x^3 - 3x + 5$. Schets, zie hiernaast.

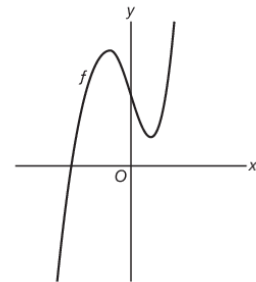
b De gemiddelde toename van $f(x)$ op het interval $[1, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10.$$

c Het differentiequotiënt van $f(x)$ op het interval $[-2, 4]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9.$$

d De helling van lijn AB is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-13)}{4} = 4.$



34 a De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 3]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(3^3 + 3) - (2^3 + 2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20 \text{ m/s.}$$

b De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,5]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,5^3 + 2,5) - (2^3 + 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,125 - 10}{0,5} = 16,25 \text{ m/s.}$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,1]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,1^3 + 2,1) - (2^3 + 2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61 \text{ m/s.}$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,01]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,01^3 + 2,01) - (2^3 + 2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601 \text{ m/s.}$$

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,001^3 + 2,001) - (2^3 + 2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006 - 10}{0,001} \approx 13,0060 \text{ m/s.}$$

c Op een kleiner wordend interval komt de gemiddelde snelheid steeds dichterbij 13 m/s.

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,0001]$ is

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(2,0001^3 + 2,0001) - (2^3 + 2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,00130006 - 10}{0,0001} \approx 13,0006 \text{ m/s.}$$

d 13 m/s

35 Op $[3; 3,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 3,01^2 - 0,4 \cdot 3^2}{0,01} = 2,404.$

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 2,40 m/s.

Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,4 \cdot 5,01^2 - 0,4 \cdot 5^2}{0,01} = 4,004.$

De snelheid op $t = 5$ is bij benadering 4,00 m/s.

36 Op $[1; 1,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{1,01+2}\right) - \left(8 - \frac{5}{1+2}\right)}{0,01} \approx 0,5537$.

De snelheid op $t = 1$ is bij benadering 0,55 m/s.

Op $[2; 2,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\left(8 - \frac{5}{2,01+2}\right) - \left(8 - \frac{5}{2+2}\right)}{0,01} \approx 0,3117$.

De snelheid op $t = 2$ is bij benadering 0,31 m/s.

37 Op $[3; 3,001]$ is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1,20 \cdot 1,15^{3,001} - 1,20 \cdot 1,15^3}{0,001} \approx 0,2551$.

De snelheid op $t = 3$ is bij benadering 0,26 m²/dag.

2.3 Raaklijnen

bladzijde 67

38 a De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-5^2 + 10 \cdot 5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{3} = 3$ m/s.

De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 4]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-4^2 + 10 \cdot 4) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{2} = 4$ m/s.

De gemiddelde snelheid op het interval $[2, 3]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-3^2 + 10 \cdot 3) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{1} = 5$ m/s.

De gemiddelde snelheid op het interval $[2; 2,5]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{(-2,5^2 + 10 \cdot 2,5) - (-2^2 + 10 \cdot 2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{0,5} = 5,5$ m/s.

b Van de vier lijnen komt de lijn AB_4 het dichtst bij de lijn die de grafiek in A raakt.

bladzijde 69

39 a De raaklijn gaat door de punten $(5, 70)$ en $(10, 120)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10$.

De snelheid op $t = 8$ is 10 km/uur.

b Teken de raaklijn in het punt met $t = 3$.

Deze gaat door de punten $(0, 30)$ en $(6, 70)$.

De richtingscoëfficiënt is $\frac{70 - 30}{6 - 0} \approx 6,7$. De snelheid op $t = 3$ is 6,7 km/uur.

c Omdat de grafiek afnemend stijgend is op $[0, 4]$, neemt de snelheid af.

d Op $t = 4$ is de snelheid minimaal.

40 a Omdat de grafiek van Vink een rechte lijn is, is de snelheid van

Vink constant. Zijn snelheid is $\frac{3000}{12}$ m/minuut = 15 km/uur.

b Braamhaar start snel en loopt steeds langzamer.

c Teken de raaklijn aan de grafiek van Braamhaar door het punt $(7, 1750)$.

Deze raaklijn gaat door de punten $(4, 1250)$ en $(10, 2250)$.

De snelheid na 7 minuten is $\frac{2250 - 1250}{10 - 4} = \frac{1000}{6}$ m/minuut = 10 km/uur.

d De raaklijn aan de grafiek van Braamhaar door het punt $(12, 2500)$ gaat ook door het punt $(10, 2250)$.

Dus de snelheid na 12 minuten is $\frac{2500 - 2250}{12 - 10} = 125$ m/minuut = 7,5 km/uur.

- e Ze lopen even hard op het moment dat de grafieken even steil zijn.
De raaklijn aan de grafiek van Braamhaar is evenwijdig met de grafiek van Vink na ongeveer $3\frac{1}{2}$ minuut.
- f Braamhaar loopt 2500 m in 12 minuten. Dat moeten er minstens 2600 zijn.
- 41** a De raaklijn die hoort bij $t = 6$ valt op het interval $[2, 10]$ samen met de grafiek.
De raaklijn gaat door de punten $(2, 80)$ en $(10, 120)$. Dus de groeisnelheid is $\frac{120-80}{10-2} = \frac{40}{8} = 5$ cm/jaar.
- b De raaklijn die hoort bij $t = 14$ gaat door de punten $(12, 130)$ en $(16, 190)$.
Rond haar veertiende verjaardag is Lotte's groeisnelheid $\frac{190-130}{16-12} = 15$ cm/jaar.
- c De gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar is $\frac{180-50}{18} \approx 7,2$ cm/jaar.
- d Teken de lijn k door de punten $(0, 50)$ en $(18, 180)$. Deze lijn hoort bij de gemiddelde groeisnelheid van 0 tot 18 jaar. Verschuif deze lijn evenwijdig.
Je vindt drie raaklijnen die evenwijdig met k zijn.
Deze raken de grafiek bij $t \approx 1,5$, $t \approx 11$ en $t \approx 15$.
Dus bij de leeftijden van 1,5, 11 en 15 jaar is de groeisnelheid van Lotte gelijk aan 7,2 cm/jaar.

bladzijde 70

- 42** a De helling in punt A met $x_A = -3$ is bij benadering het differentiequotient op het interval $[-3; -2,999]$.

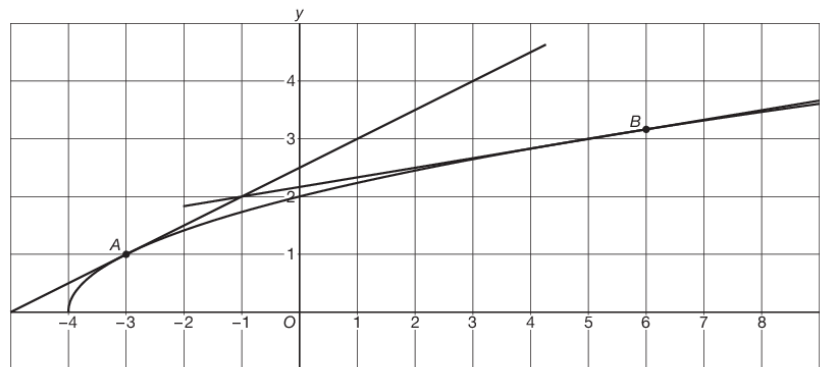
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{-2,999+4} - \sqrt{-3+4}}{0,001} \approx 0,50$$

De helling in punt B met $x_B = 6$ is bij benadering het differentiequotient op het interval $[6; 6,001]$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{6,001+4} - \sqrt{6+4}}{0,001} \approx 0,16$$

b

x	-4	-3	0	5
$y = \sqrt{x+4}$	0	1	2	3



43 Voer in $y_1 = x^2 + x - 2$.
 $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = -1$
 $k: y = -x + b$
 $f(-1) = -2$, dus $A(-1, -2) \left\{ \begin{array}{l} -1 + b = -2 \\ 1 + b = -2 \\ b = -3 \end{array} \right.$
Dus $k: y = -x - 3$.

44 Voer in $y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$.
 $l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -0,5$
 $l: y = -0,5x + b$
 $f(3) = 4$, dus $A(3, 4) \left\{ \begin{array}{l} -0,5 \cdot 3 + b = 4 \\ -1,5 + b = 4 \\ b = 5,5 \end{array} \right.$
Dus $l: y = -0,5x + 5,5$.

bladzijde 71

45 Voer in $y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$.
 $k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = -0,8$
 $k: y = -0,8x + b$
 $f(-2) = 5$, dus $A(-2, 5) \left\{ \begin{array}{l} -0,8 \cdot -2 + b = 5 \\ 1,6 + b = 5 \\ b = 3,4 \end{array} \right.$
Dus $k: y = -0,8x + 3,4$.

$l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2,5$
 $l: y = 2,5x + b$
 $f(1) = 3,5$, dus $B(1; 3,5) \left\{ \begin{array}{l} 2,5 \cdot 1 + b = 3,5 \\ b = 1 \end{array} \right.$

Dus $l: y = 2,5x + 1$.
Snijpunt berekenen van $k: y = -0,8x + 3,4$ en $l: y = 2,5x + 1$.
 $-0,8x + 3,4 = 2,5x + 1$
 $-3,3x = -2,4$
 $x \approx 0,73$
 $y = 2,5x + 1 \left\{ \begin{array}{l} y \approx 2,82 \end{array} \right.$
Snijpunt $(0,73; 2,82)$.

46 a Voer in $y_1 = 37 + \frac{3}{2x+1}$.
 $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=2} = -0,24$
Dus op $t = 2$ is de snelheid $-0,24$ °C/uur.

b $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=3} \approx -0,12$
Op $t = 3$ is de lichaamstemperatuur $T = 37,43$ °C.
Het duurt dan nog $\frac{0,43}{0,12} \approx 3,5$ uur voordat de temperatuur van 37 °C is bereikt. Dus op $t \approx 6,5$.

47 a Voer in $y_1 = \frac{200x^2 + 1200x + 450}{4x^2 + 9}$.
De optie maximum geeft de top $(1,5; 150)$.
De inspanning duurde 1,5 minuut en de maximale hartslagfrequentie is 150 slagen per minuut.

b Voer in $y_2 = 120$.

De optie intersect geeft $x \approx 3,67$.

Het duurt $3,67 - 1,5 = 2,17$ minuten ≈ 130 seconden na het beëindigen van de inspanning.

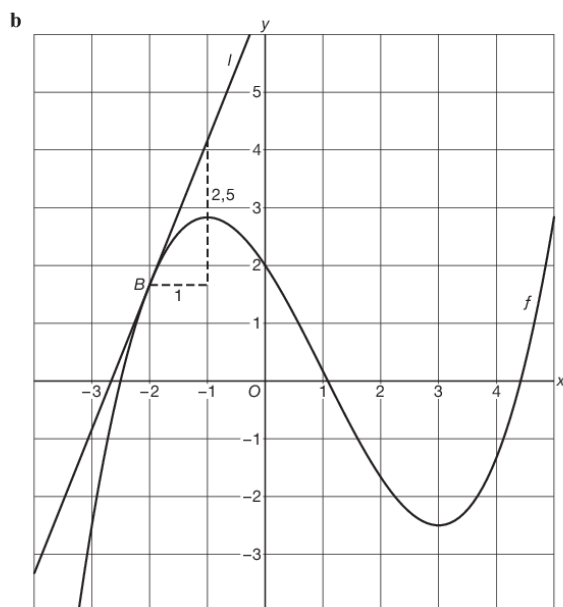
$$\left[\frac{dF}{dt} \right]_{t=3,67} \approx -13,6$$

Op dat moment neemt de hartslag af met ongeveer 14 slagen per minuut.

2.4 Hellinggrafieken

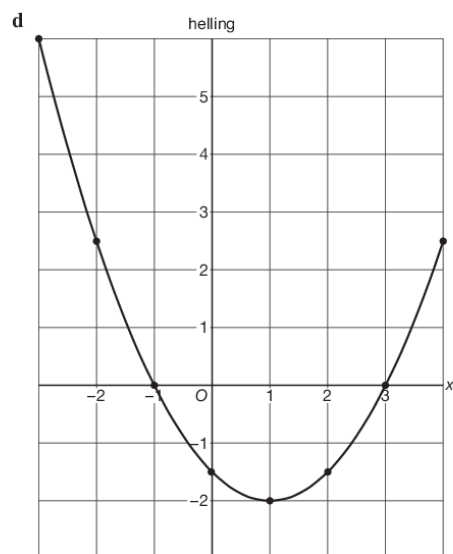
bladzijde 73

48 a De raaklijn k gaat door $(-3; -2,5)$ en $(-2; 3,5)$, dus $rc_k = \frac{3,5 - (-2,5)}{-2 - (-3)} = \frac{6}{1} = 6$.



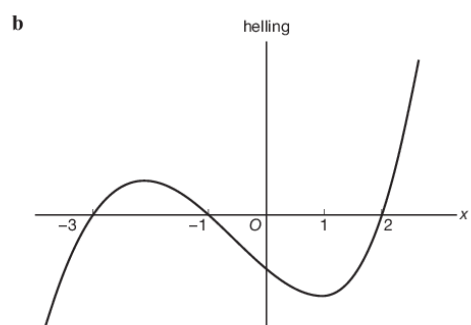
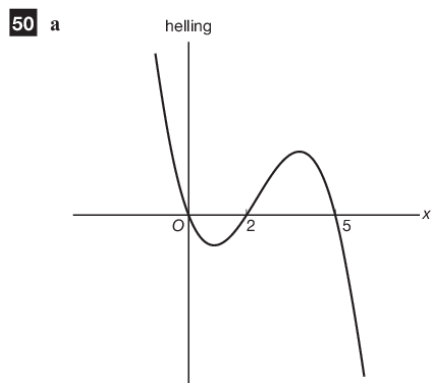
c

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
helling	6	2,5	0	-1,5	-2	-1,5	0	2,5

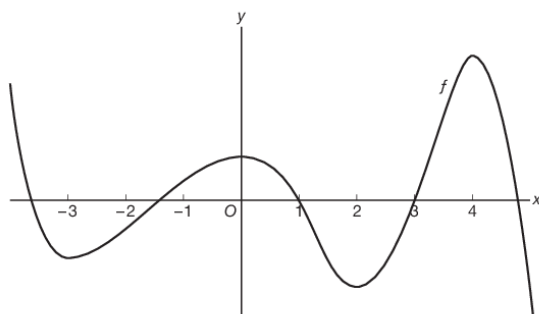


bladzijde 75

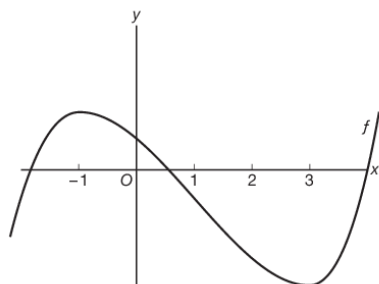
- 49** Bij f hoort hellinggrafiek B.
 Bij g hoort hellinggrafiek D.
 Bij h hoort hellinggrafiek A.
 Bij k hoort hellinggrafiek C.



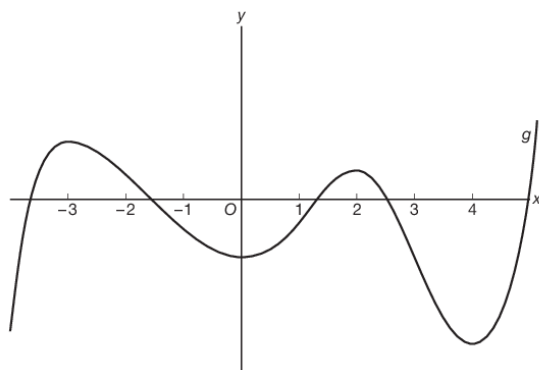
- 51** a De grafiek van f is dalend op $\langle -\infty, -3 \rangle$.
 b De grafiek van f heeft een top bij $x = -3$ omdat de hellinggrafiek daar de x -as snijdt. Dat is een laagste punt.
 c De grafiek van f is stijgend op $\langle -3, 0 \rangle$.
 d De grafiek van f heeft een hoogste punt bij $x = 0$. De grafiek gaat bij $x = 0$ over van stijgend (hellinggrafiek ligt boven de x -as) naar dalend (hellinggrafiek ligt onder de x -as).
 e



- 52** a

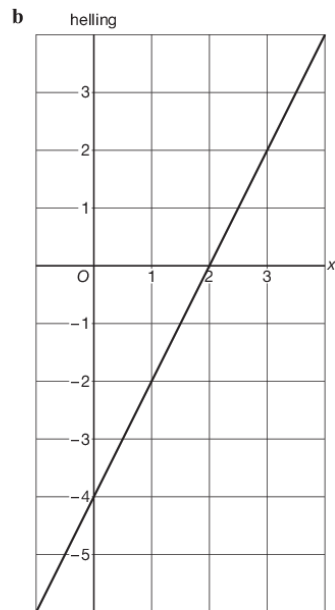


- b



- 53** a

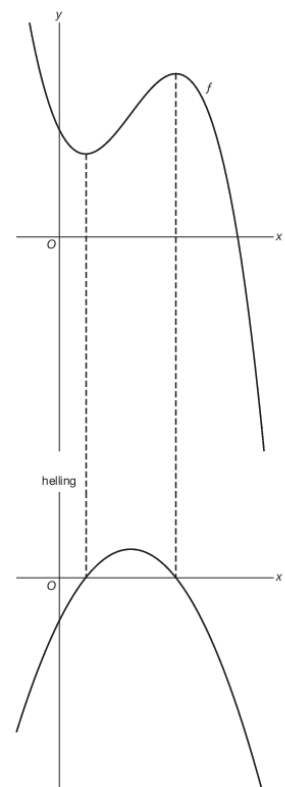
x	-1	0	1	2	3	4
helling	-6	-4	-2	0	2	4



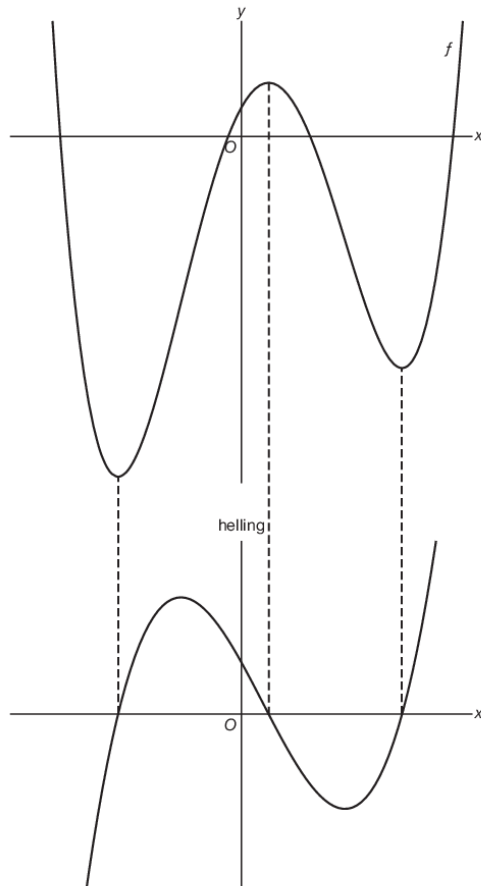
bladzijde 78

- 54 a** Voer in $y_1 = -0,1x^3 + x^2 - 2x + 5$ en
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$ (op de TI) of
 $y_2 = d/dx(y_1, x)$ (op de Casio).
 Kies Xmin = -2, Xmax = 10, Ymin = -10 en Ymax = 10.

b helling = $\left[\frac{dy_1}{dx} \right]_{x=7} = y_2(7) = -2,7$

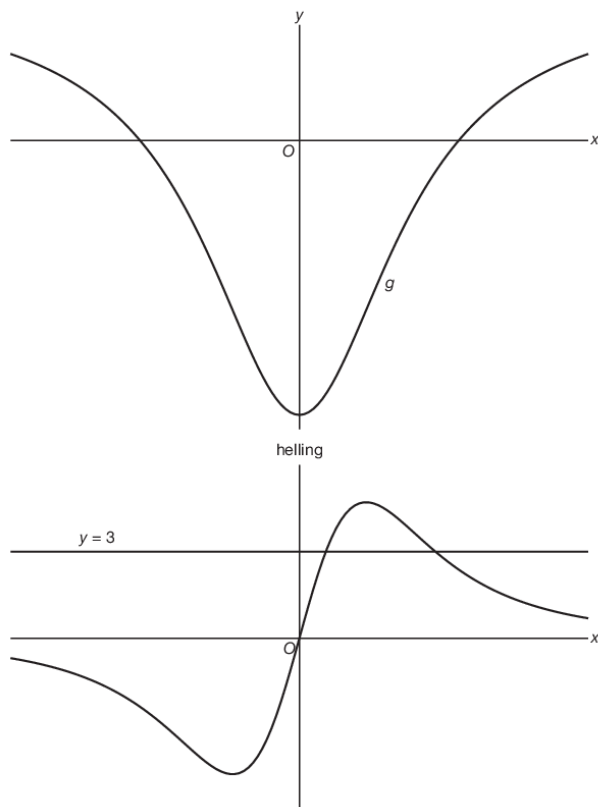


- 55 a** Voer in $y_1 = 0,1x^4 - 0,3x^3 - 4,5x^2 + 9x + 5$ en
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$ (op de TI) of
 $y_2 = d/dx(y_1, x)$ (op de Casio).
 Kies Xmin = -8, Xmax = 8, Ymin = -60 en Ymax = 30.



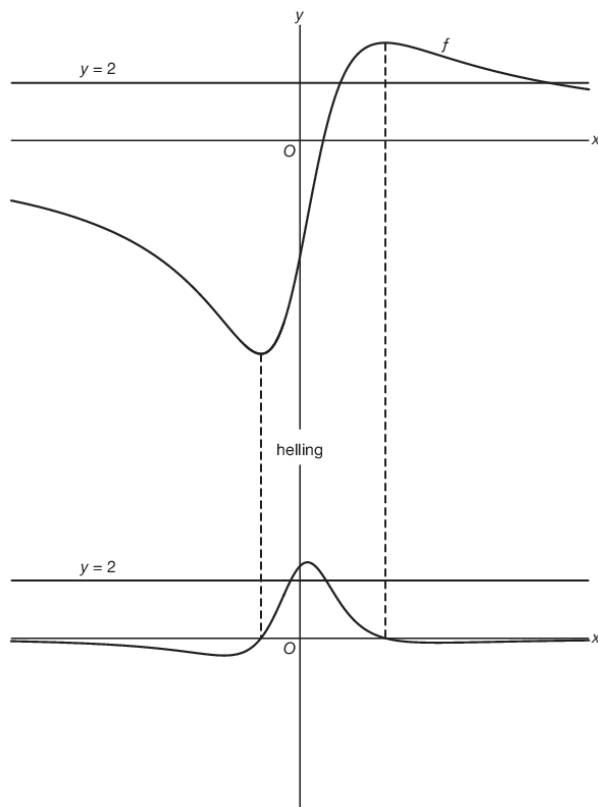
- b** Voer in $y_3 = 10$.
 De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x \approx -3,68$, $x \approx -0,11$ en $x \approx 6,04$.
 Dus voor $x \approx -3,68$, $x \approx -0,11$ en $x \approx 6,04$ is de helling van de grafiek gelijk aan 10.

- 56 a** Voer in $y_1 = (5x^2 - 38) : (x^2 + 4)$ en
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$ (op de TI) of
 $y_2 = d/dx(y_1, x)$ (op de Casio).
 Kies $X_{\min} = -5$, $X_{\max} = 5$, $Y_{\min} = -10$ en $Y_{\max} = 5$.

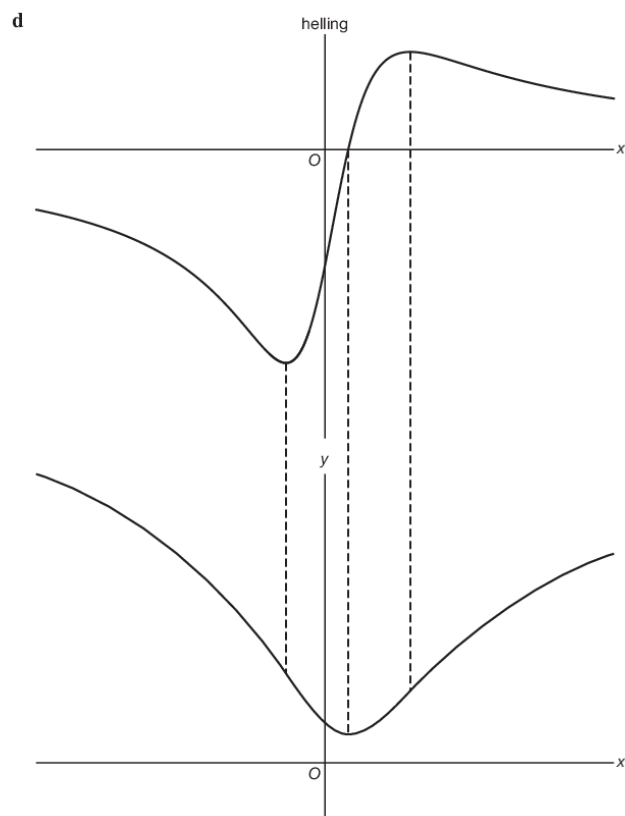


- b** Voer in $y_3 = 3$.
 De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x \approx 0,458$ en $x \approx 2,354$.
 Zie de figuur.
 Voor $0,458 < x < 2,354$ is de helling van de grafiek van g meer dan 3.

- 57 a** Voer in $y_1 = (40x - 64) : (x^2 + 16)$ en
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$ (op de TI) of
 $y_2 = d/dx(y_1, x)$ (op de Casio).
 Kies $X_{\min} = -20$, $X_{\max} = 20$, $Y_{\min} = -8$ en $Y_{\max} = 4$.



- b** Voer in $y_3 = 2$.
 De optie intersect met y_1 en y_3 geeft $x \approx 2,79$ en $x \approx 17,21$.
 Zie de figuur.
 $f(x) > 2$ voor $2,79 < x < 17,21$.
- c** De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x \approx -0,65$ en $x \approx 1,80$.
 Zie de figuur.
 Voor $-0,65 < x < 1,80$ is de helling van de grafiek van f meer dan 2.

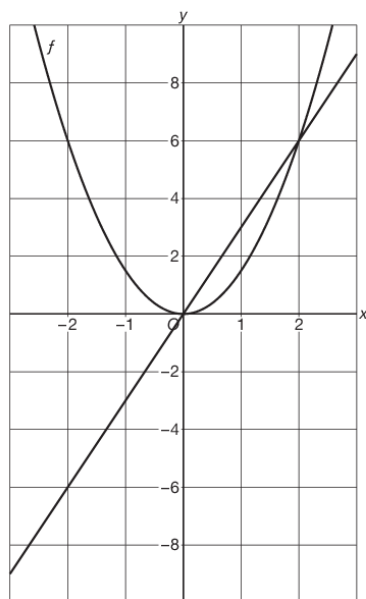


2.5 Differentiëren

bladzijde 80

58 a

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	6	1,5	0	1,5	6



b De formule is $y = 3x$.



- 59** a In elk punt van de grafiek van g is de helling 3, want de grafiek van g is een lijn met richtingscoëfficiënt 3.
b $y = 3$

- 60** $y = 0$

bladzijde 81

- 61** a $f(x) = 5x^2 - 7x + 5$ geeft $f'(x) = 10x - 7$
b $g(x) = -2\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3$ geeft $g'(x) = -5x + 4$
c $h(x) = 0,02x^2 + 1,7x$ geeft $h'(x) = 0,04x + 1,7$
d $k(x) = 7x + 10$ geeft $k'(x) = 7$
- 62** a $f(x) = (2x - 7)(8 + x) = 16x + 2x^2 - 56 - 7x = 2x^2 + 9x - 56$ geeft $f'(x) = 4x + 9$
b $g(p) = -12p^2 + 30p$ geeft $g'(p) = -24p + 30$
c $V(t) = 100 - (t^2 - 6t) = 100 - t^2 + 6t$ geeft $V'(t) = -2t + 6$
d $K(q) = -0,01q^2 + 20q$ geeft $K'(q) = -0,02q + 20$
- 63** a $f(x) = (5x + 7)(4 - 3x) = 20x - 15x^2 + 28 - 21x = -15x^2 - x + 28$ geeft $f'(x) = -30x - 1$
b $g(x) = (3x + 6)^2 = 9x^2 + 36x + 36$ geeft $g'(x) = 18x + 36$
c $h(x) = 5(x - 3)^2 + 5(x - 1) + 8 = 5(x^2 - 6x + 9) + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 30x + 45 + 5x - 5 + 8 = 5x^2 - 25x + 48$ geeft $h'(x) = 10x - 25$
d $k(x) = -3(x - 1)(5 - 2x) - 8(x - 7) = -3(5x - 2x^2 - 5 + 2x) - 8x + 56 = -3(-2x^2 + 7x - 5) - 8x + 56 = 6x^2 - 21x + 15 - 8x + 56 = 6x^2 - 29x + 71$ geeft $k'(x) = 12x - 29$

- 64 a ***
b Je kunt nagaan dat de grafiek van f' door het punt $(1, 1)$ gaat.
 $f'(1) = 1$ geeft $1 = a \cdot 1^2$, dus $a = 1$.

X	Y1	Y2	Y3
1	1	1	1
2	4	4	4
3	9	9	9
4	16	16	16
5	25	25	25
6	36	36	36
7	49	49	49
8	64	64	64
9	81	81	81
10	100	100	100

bladzijde 82

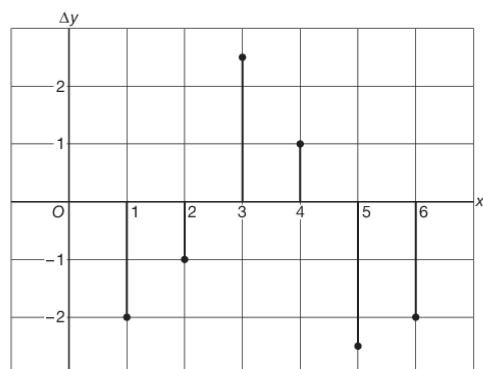
- 65 a** $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x$ geeft $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + 2$
b $g(x) = -2x^7 - 3x^5 + 3,4$ geeft $g'(x) = -14x^6 - 15x^4$
c $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 6\frac{1}{2}t^2 - 12$ geeft $h'(t) = -t^2 + 13t$
d $k(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{6}q^3$ geeft $k'(q) = 1 + q + \frac{1}{2}q^2$
- 66 a** $f(x) = 3(2x + 1)^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) = 12x^2 + 12x + 3$ geeft $f'(x) = 24x + 12$
b $g(x) = 7(3x - 2)(x^2 + 2x) = 7(3x^3 + 6x^2 - 2x^2 - 4x) = 7(3x^3 + 4x^2 - 4x)$
 $= 21x^3 + 28x^2 - 28x$ geeft $g'(x) = 63x^2 + 56x - 28$
c $h(x) = 3px^8 - px^4$ geeft $h'(x) = 24px^7 - 4px^3$
d $k(x) = x^3 + a$ geeft $k'(x) = 3x^2$
- 67 a** $f(x) = (4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 16x^4 - 81$ geeft $f'(x) = 64x^3$
b $g(x) = 4x(x^2 - 4)(x^2 - 9) = 4x(x^4 - 9x^2 - 4x^2 + 36) = 4x^5 - 36x^3 - 16x^3 + 144x$
 $= 4x^5 - 52x^3 + 144x$ geeft $g'(x) = 20x^4 - 156x^2 + 144$
c $h(x) = (2x^3 - 4)^2 = 4x^6 - 16x^3 + 16$ geeft $h'(x) = 24x^5 - 48x^2$
d $k(x) = (3x^2 - 1)^2 - (2x^2 - 3)^2 = 9x^4 - 6x^2 + 1 - (4x^4 - 12x^2 + 9)$
 $= 9x^4 - 6x^2 + 1 - 4x^4 + 12x^2 - 9 = 5x^4 + 6x^2 - 8$ geeft $k'(x) = 20x^3 + 12x$

Diagnostische toets

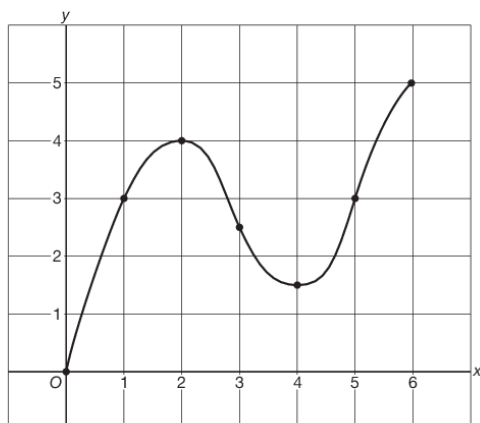
bladzijde 84

1

x-interval bij $\Delta x = 1$	Δy
$[0, 1]$	-2
$[1, 2]$	-1
$[2, 3]$	$2\frac{1}{2}$
$[3, 4]$	1
$[4, 5]$	$-2\frac{1}{2}$
$[5, 6]$	-2



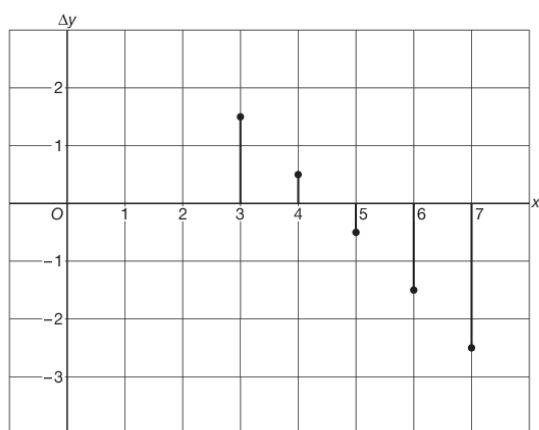
2



In deze globale grafiek is $(0, 0)$ als beginpunt gekozen. Dat mag een ander punt van de y -as zijn.

3

x	y	Δy
2	6	—
3	7,5	1,5
4	8	0,5
5	7,5	-0,5
6	6	-1,5
7	3,5	-2,5



4 a De gemiddelde snelheid waarmee y verandert op $[0, 4]$ is $\frac{20-0}{4-0} = 5$.

Op $[2, 8]$ is dat $\frac{12,5-22,5}{8-2} \approx -1,67$.

b Het differentiequotiënt op het interval $[1, 5]$ is $\frac{10-15}{5-1} = -1,25$.

Op $[3, 7]$ is dat $\frac{5-26}{7-3} = \frac{-21}{4} = -5,25$.

5 Het differentiequotiënt op $[-2, 3]$ is

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{5,5 - (-12)}{5} = \frac{17,5}{5} = 3,5.$$

6 Op $[5; 5,01]$ is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{-1 + \sqrt{4 \cdot 5,01 + 1} - (-1 + \sqrt{4 \cdot 5 + 1})}{0,01} \approx 0,436$.

De snelheid op $t = 5$ is ongeveer 0,44 m/s.

7 a Voer in $y_1 = \frac{3x-6}{x^2+2}$.

$B(0, -3)$

$k: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 1,5$

Dus $k: y = 1,5x - 3$.

b Het snijpunt met de x -as is $A(2, 0)$.

$l: y = ax + b$ met $a = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = 0,5$

$$\begin{aligned} l: y = 0,5x + b \\ A(2, 0) \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &0,5 \cdot 2 + b = 0 \\ &1 + b = 0 \\ &b = -1 \end{aligned} \right\}$$

Dus $l: y = 0,5x - 1$.

8 a Voer in $y_1 = -0,004x^3 + 0,12x^2 - 1,5x + 21$.

$\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=5} = -0,6$

Op $t = 5$ daalt de temperatuur met een snelheid van $0,6$ °C/minuut.

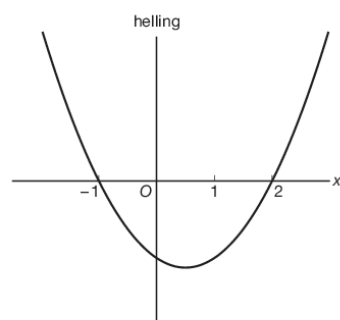
b $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=15} = -0,6$

Op $t = 15$ is $T = 12$.

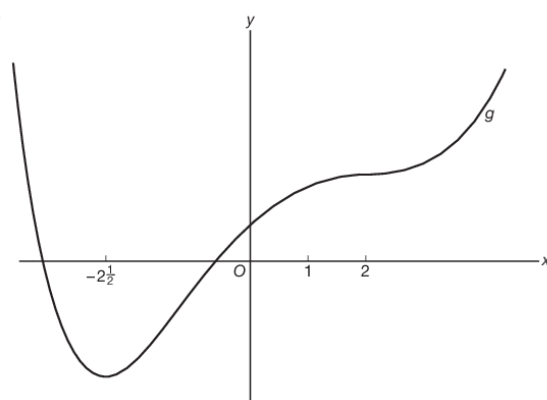
Vanaf $t = 15$ duurt het $\frac{12}{0,6} = 20$ minuten totdat het vriespunt wordt bereikt.

Dus op $t = 15 + 20 = 35$.

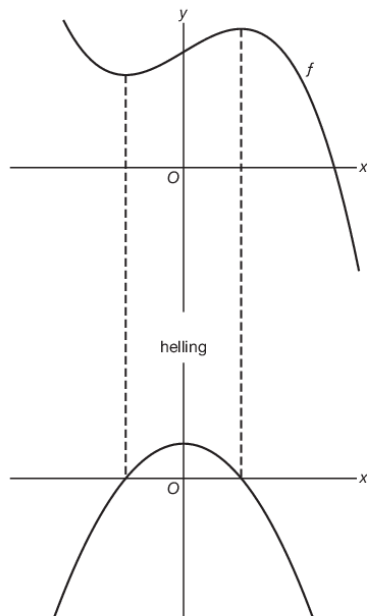
9 a



b



- 10 a** Voer in $y_1 = -0,2x^3 + 0,6x + 2$ en
 $y_2 = \text{nDeriv}(y_1, x, x)$ (op de TI) of
 $y_2 = d/dx(y_1, x)$ (op de Casio).
 Kies Xmin = -5, Xmax = 5, Ymin = -5 en Ymax = 5.



b helling = $\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=4} = -9$

- c** Voer in $y_3 = -5$.

De optie intersect met y_2 en y_3 geeft $x \approx -3,06$ en $x \approx 3,06$.

Dus voor $x \approx -3,06$ en voor $x \approx 3,06$ is de helling van de grafiek van f gelijk aan -5 .

- 11 a** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7$ geeft $f'(x) = x^2 - 6x$
b $g(p) = 4p^3 + \frac{1}{6}p^2 - 11p + 20$ geeft $g'(p) = 12p^2 + \frac{1}{3}p - 11$
c $h(q) = 3q - 2(q^2 - 4q) = 3q - 2q^2 + 8q = -2q^2 + 11q$ geeft $h'(q) = -4q + 11$
d $k(x) = ax^2 + bx + c$ geeft $k'(x) = 2ax + b$
- 12 a** $f(x) = (3-x)(5+2x) = 15 + 6x - 5x - 2x^2 = -2x^2 + x + 15$ geeft $f'(x) = -4x + 1$
b $g(x) = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$ geeft $g'(x) = 18x + 6$
c $h(x) = x(2x-1)^2 = x(4x^2 - 4x + 1) = 4x^3 - 4x^2 + x$ geeft $h'(x) = 12x^2 - 8x + 1$
d $v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + at + b$ geeft $v'(t) = t^2 + 4t + a$